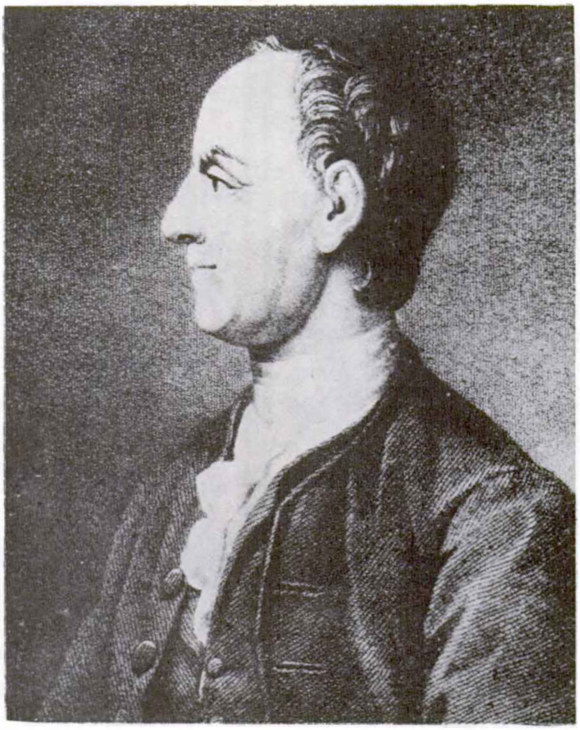

Leonhard Euler (1707-1783)

150 ANYS DE GÈNESI TOPOLÒGICA: D'EULER A POINCARÉ

per

Manuel Castellet i Solanas

Si hom es proposa de parlar o d'escriure sobre el desenvolupament de la topologia durant el segle passat, hom es veu gairebé obligat a recórrer a l'obra excel·lent de Jean-Claude Pont, "La topologie algébrique: des origines à Poincaré", publicada per les Presses Universitaires de France el 1974. Si qui escriu no és, com en aquest cas, un especialista de la història de la matemàtica, l'ús que haurà de fer de l'obra de J.-C. Pont serà tan sistemàtic que no tindrà altre remei que reproduir-ne alguns trossos. Això és el que ha ocorregut en aquest article: moltes de les idees que són expressades a continuació, i àdhuc alguns paràgrafs sencers, provenen del llibre esmentat.

Al voltant d'Euler

Encara que el terme "Topologia" no fou creat fins a 1836 per J.B. Listing, els inicis d'aquesta branca de la matemàtica poden ésser situats, si més no a nivell d'idea, al 8 de setembre de 1679 en les frases que Gottfried W. Leibniz escriu a Christian Huygens: "... encara ens falta una altra anàlisi pròpiament geomètrica o lineal, que ens expressi directament *situm*, com l'àlgebra expresa *magnitudinem*. I em sembla que en veig la manera..." (Ch. Huygens, Oeuvres complètes, t. 8, 2899: Correspondència). Leibniz anomena aquesta nova teoria "Analysis situs".

Nogensmenys, la resposta donada per H.G. Grassmann a les idees de Leibniz porta directament al càlcul vectorial i de fet no és fins al 1736 que probablement neix la topologia, quan Leonhard Euler (1707-1983) reconeix un aspecte particular en un problema que, en principi, no es distingeix per res del seus anàlegs de la geometria elemental: el problema dels ponts de Koenigsberg ("Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis", *Comment. Acad. Sci. Petrop.,* 8, 1736). Amb aquest treball, presentat el 26 d'agost de 1735 a l'Acadèmia de St. Petersburg, per primer cop un matemàtic s'ocupa conscientment de l' "analysis situs". Cito textualment d'Euler: "A més d'aquesta part de la geometria que tracta de les magnituds i que ha estat conreada des de sempre amb molt de zel, n'hi ha una altra de completament desconeguda fins als nostres dies, de la qual parlà Leibniz per primer cop i que ell anomenà geometria de la situació (Geometrie der Lage). Segons ell, aquesta part de la geometria s'ocupa de determinar solament la posició i de cercar les propietats que resulten d'aquesta posició; en aquest treball hom no ha pas de considerar les magnituds en elles mateixes ni calcular-les; però encara no és ben establert quins problemes d'aquest tipus pertanyen a la geometria de situació ni quin mètode cal emprar per a resoldre'ls; és per això que ara fa poc, quan se m'ha presentat un problema que semblava lligat a la geometria ordinària però la solució del qual no depenia ni de la determinació de magnituds ni del càlcul de quantitats, no he dubtat a relacionar-lo amb la geometria de situació, i més pel fet que només entren consideracions de posició en la solució, mentre que el càlcul no hi intervé per res".

Euler planteja el problema dels ponts de Koenigsberg (l'illa prussiana de Kneiphof, encerclada pel riu Pregel que es divideix en dos, i set ponts damunt el riu; el problema consisteix a determinar si una persona pot fer un passeig passant un cop i només un cop per cada pont). Després el generalitza a una figura arbitrària amb un nombre arbitrari de ponts i demostra que en el cas dels ponts de Koenigsberg el problema no té solució. "Jo he fet d'aquest problema el següent de més general: sigui com sigui la figura del riu i la distribució d'aquest en braços, i qualsevol que sigui el nombre de ponts, trobar si hom pot travessar el riu passant un cop per cada pont".

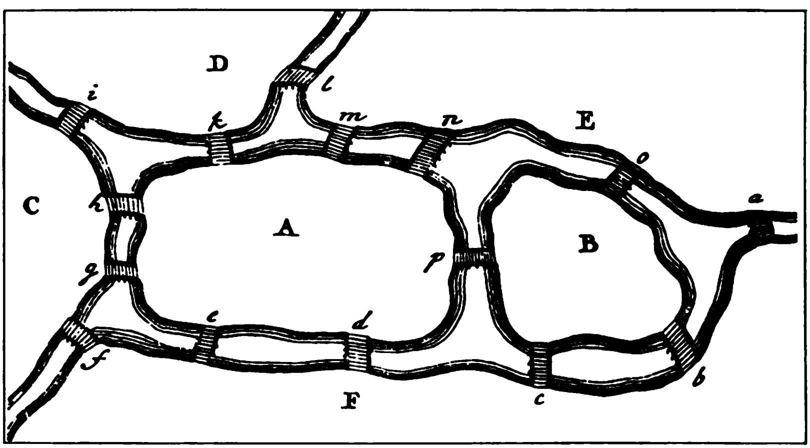

Figura 1

Però el treball d'Euler que havia de tenir més repercussió en el futur fou el que tractava del teorema dels políedres. En aquesta qüestió és fonamental el concepte de políedre. Fins al començament del segle XIX hom considerava que políedre ho era qualsevol cos sòlid (convex o no) "comprès entre cares planes". Aquesta definició esdevé grossera i inadequada quan passem a la topologia. Euler i Cauchy, entre altres, no avancen més perquè els manca una definició adequada que, d'altra banda, no arribarà fins a 1847 amb el treball de vòn Staudt.

Cal distingir quatre dates en la història del teorema d'Euler:

a) 1750: enunciat i demostració d'Euler,

b) 1813: Lhuilier descobreix que no és vàlid per a tots els políedres,

c) 1847: hipòtesis adequades i demostració correcta de von Staudt,

d) 1850: generalització a espais n-dimensionals per Schläfli.

Reconstruïm-ne una mica la història:

El 1750 Euler es proposa establir una classificació dels políedres; la classificació segons el nombre de cares és insuficient, i idea una classificació segons el nombre de cares i el de vèrtexs conjuntament; així, parla d'un tetràedre-hexàgon, etc. És en aquest moment que descobreix que, si dos políedres tenen el mateix nombre c de cares i el mateix nombre v de vèrtexs, també tenen el mateix nombre a d'arestes i, precisament, $v - a + c = 2$.

Euler esmenta per primera vegada aquest teorema en una carta a Christian Goldbach el 14 de novembre de 1750 i llegeix una memòria sobre aquest tema a l'Acadèmia de Ciències de Berlín el 9 de setembre de 1751. ("Demonstratio nonnularum insignium propietatum...", *Novi Comment. Acad. Sci. Petrop.,* 4, 1752).

L'enunciat d'Euler és, per descomptat, incorrecte, car la seva categoria de políedres és massa àmplia. La demostració que en fa — a base de seccions que li van permetent de convertir cada políedre en un altre amb un vèrtex de menys, de manera que hom conserva $v - a + c$, fins que hom arriba a una piràmide, per a la qual és certa la relació $v - a + c = 2$ — conté els errors següents: a) els seus políedres han d'ésser convexos i la convexitat no es conserva a través del procés de seccions (aquest error pot ésser remeiat prou fàcilment), b) al cap d'un cert nombre d'operacions hom pot obtenir no un políedre sinó la unió de dos políedres per una aresta o un vèrtex, de manera que hom no pot tornar-hi a aplicar el procés.

D'altra banda, sembla que Euler no s'adonà del fet que el seu teorema era un problema d'*analysis situs.*

Cap al final del segle XVIII i el començament del XIX molts matemàtics s'ocupen del teorema d'Euler. Adrien-Marie Legendre (1752-1833) en dóna una demostració que només és vàlida per a políedres convexos, projectant el políedre sobre una esfera interior i calculant àrees ("Éléments de géométrie avec des notes", Firmin-Didot, 1794). Augustin L. Cauchy (1789-1857) també fa una demostració del teorema d'Euler basant-se en la relació "$v - a + c = 1$" que estableix per a una xarxa de polígons. En la demostració que fa de la relació anterior a les "Recherches sur les polyèdres" (*J. École Polytechnique,* 9, 1813) el 1811, comet la mateixa errada que Euler, car no disposa d'una definició bona de políedre. El raonament de Cauchy és el següent: si de la superfície d'un políedre suprimim una cara, la resta forma una xarxa de polígons limitada per la vora de la cara suprimida, i hi aplica $v - a + c = 1$; però no tots els políedres són així!

Si l'enunciat del teorema d'Euler amb prou feina incidí en l'orientació del pensament matemàtic, la memòria de Simon Lhuilier (1750-1840) publicada el 1813 ("Mémoire sur la polyédrométrie", *Ann. Math. pures et appl.*, 3, 1812-1813) constitueix un fet important en la història de la topologia. Per començar, amplia, respecte a la geometria clàssica, el concepte de cos sòlid i, segonament, i aquest és el fet essencial, pren consciència de l'errada comesa en l'enunciat d'Euler i mostra que convé precisar quines associacions de polígons han d'ésser anomenades políedres i introdueix la noció de gènere d'un políedre.

La segona part de la memòria de Lhuilier descobreix dues menes d'excepcions del teorema d'Euler: a) si el políedre posseeix una cavitat, llavors $v - a + c = 4$, b) si el políedre és anular, llavors $v - a + c = 2(n - 1)$, on n és el nombre d'obertures. (Hom pot observar que n és el gènere del políedre, és a dir, la meitat del nombre de Betti. El mètode que segueix Lhuilier és el mateix del "Querschnitt" seguit per Riemann quaranta anys més tard).

Cal esperar fins a 1847 perquè siguin aclarides les diferències essencials entre els políedres per als quals és cert el teorema d'Euler i els altres. En la cèlebre "Geometrie der Lage" (Bauer und Rasse, 1847), Christian von Staudt (1798-1867) presenta finalment el teorema d'Euler sota hipòtesis correctes. A més, fa una demostració correcta i elegant del teorema. En llenguatge modern seria: considerem un complex K de v vèrtexs, a arestes i c cares; hom pot trobar un subcomplex K' que sigui un arbre i $v' = v$. Llavors tenim $v' - a' = 1$. Construïm un altre arbre K'' disjunt de K' amb els vèrtexs a les cares de K. Tenim que $v'' = c$, $v'' - a'' = c - a'' = 1$. D'altra banda, $a' + a'' = a$ i tenim, doncs, la relació desitjada.

Per tal d'acabar aquest apartat és obligat parlar del treball excepcional de Ludwig Schläfli (1814-1895) que, tal com digué P.H.Schoute, "sobrepuja, en vàlua científica, una bona part d'allò que fins avui ha estat fet en el camp de la geometria multidimensional". En la memòria "Vielfache Continuität" (que patí moltes vicissituds entre el 1851, quan fou escrita, i el 1901, que fou publicada) (*Denkschrift. Schweiz. Natur. Gesellschaft,* Berna, 1901) Schläfli generalitza el teorema d'Euler a políedres en l'espai: si a_i indica el nombre d'i-símplexs d'un poli-esquema n-dimensional, tenim que $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i = 2$. La demostració es fa per inducció completa, primer sobre n (seguint la tècnica de Cauchy) i després sobre el nombre de políedres que constitueixen l'esquema.

La influència de Gauss

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) no té cap publicació dedicada a la topologia però, no obstant això, exercí una influència considerable en el desplegament d'aquesta. Segons ell mateix, la demostració que fa, el 1799, del teorema fonamental de l'àlgebra "pertany a la geometria de situació". En les seves cartes esmenta reiteradament la geometria *situs*, especialment en estudiar les superfícies corbes. És a instàncies de Gauss que Listing escriu les seves dues primeres memòries i que Möbius aborda l'estudi de la topologia.

Cal fer una menció especial de les seves cèlebres "Disquisitiones" del 1827 ("Disquisitiones generales circa superficies curvas", *Comment. Soc, Sci. Göttingensis Math.*, **6**, 1828), de les quals hom pot destacar a) la introducció de la curvatura íntegra; b) el teorema egregi; diu Gauss: "Si una superfície corba és aplicada damunt una altra superfície corba qualsevol, la mesura de la curvatura a cada punt roman invariable. Per tant, la curvatura íntegra d'una porció finita qualsevol de la superfície no serà alterada". Aquestes darreres ratlles condueixen, inevitablement, a les deformacions isomètriques i a llurs invariants, preludi de les deformacions topològiques. c) L'ús sovintejat del concepte d'aplicació d'una superfície sobre una altra tal que "a tot punt de la primera correspongui un punt ben determinat de la segona i això d'una manera contínua". d) El concepte d'espai n-dimensional que Gauss és el primer a definir i a emprar.

Tampoc no hem d'oblidar els treballs de Gauss en la teoria de nusos ("A collection of knots", "Zur Geometria situs" i "Zur Geometrie der Lage für zwei Raumdimensionen", publicats el 1794) ni un escrit de 1840 on inicia la teoria de l'ordre de connexió.

. La influència de Gauss es deixa sentir molt marcadament en els treballs topològics de Johann Benedikt Listing (1808-1882). Encara que els treballs de Riemann són anteriors a la segona obra de Listing, primer parlaré d'aquest perquè el "Census" és relacionat de manera natural al desenvolupament del teorema d'Euler.

La primera obra de Listing, els "Vorstudien zur Topologie" (Göttingen Studien, 1847), és la primera que hom dedica a la topologia i la primera on el nom de topologia apareix oficialment. Diu Listing: "Per topologia entenem doncs l'estudi dels aspectes qualitatius de les formes espacials o de les lleis de connexió, de la posició mútua i de l'ordre dels punts, de les rectes, de les superfícies i dels cossos, així com de les parts i unions d'aquests, fent abstracció de llurs relacions de mesura i magnitud".

Durant els cent anys que transcorregueren des de l'aparició empírica del teorema d'Euler fins a la generalització que en donà Schläfli —passant per un enunciat aproximat, la demostració d'un cas particular i l'enunciat exacte— ningú no el relacionà amb l'*analysis situs*. És Listing qui omple aquesta llacuna. En la seva memòria de 1861, el "Census" ("Der Census räumlicher Complexe oder Verallgemeinerung des Euler'schen Satzes von der Polyedern", *Abhand. König. Gesells. der Wissens. Göttingen*, **10**, 1862), Listing concentra l'atenció en l'extensió del teorema d'Euler als complexos espacials més generals. Per a fer-ho determina la influència de la natura topològica de cada constituent del complex, fent ús de la topologia. Això és una gran innovació. Diu Listing: "L'enunciat més general consisteix a reunir els nombres de constituents respectius en un agregat algèbric, comptant positivament els que corresponen a constituents de dimensió parella i negativament els altres". És la primera vegada que un autor agrupa els objectes, els nombres dels quals entren al teorema d'Euler, segons llur paritat.

El "Census" és compost essencialment de quatre parts:

a) Definició dels complexos espacials i dels constituents d'aquests;

b) Classificació d'aquests complexos mitjançant criteris topològics, és a dir, "propietats que no es refereixen ni a la quantitat ni a la mesura, sinó a l'ordre i a la situació";

c) Teoremes preliminars, amb els quals generalitza els teoremes de Cauchy i d'Euler;

d) Teorema fonamental, junt amb una gran varietat d'exemples.

En les obres que acabem de comentar veiem com l'autor defineix una ciència, la bateja, n'estudia els objectes fonamentals i estableix la relació que els lliga. Hi ha, a més, una visió àmplia de l'autonomia de la topologia. Observa que en alguns complexos els nombres dels distints constituents s'equilibren combinats escaientment, però no s'adona que precisament aquest desequilibri permet una classificació, que és un problema fonamental de la topologia.

De Riemann a la fi del segle

La publicació el 1851 de la tesi doctoral de Bernhard Riemann (1826-1866) converteix la topologia en una ciència indispensable per a l'estudi de les funcions analítiques, una de les grans obres del segle XIX.

En aquest paràgraf estudiaré detalladament, a més d'aquesta tesi ("Grundlage für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen complexen Grösse", Göttingen, 1851), la teoria de funcions abelianes ("Theorie der Abel'schen Funktionen", *J. Math.*, **54**, 1857).

La tesi doctoral de Riemann conté dues idees essencials per a la topologia. Primera, en comptes d'estudiar les funcions a partir de l'expressió analítica que en lliga les variables, ho fa amb l'ajut d'"un petit nombre de principis generals i simples". Així, quan estudia la relació donada per $\int_c f(z)dz = 0$ demostra que no és solament vàlida per a tota corba tancada c que sigui la vora d'una superfície sinó que ho és en general; per a fer-ho introdueix el concepte de "secció transversal" que, partint d'un punt d'aquesta corba, secciona la superfície simplement i acaba en un punt de la nova. Així Riemann obté una classificació de les superfícies: anomena simplement connexes aquelles que no necessiten cap modificació perquè hi valguí la relació $\int_c f(z)dz = 0$ i després afegeix: "Si el nombre indeterminat de seccions transversals és n i el de trossos m, el nombre n–m és constant per a tota descomposició d'una superfície en trossos simplement connexos... Aquest nombre podria ésser designat amb el nom d'ordre de connexió d'una superfície. Disminuirà una unitat per cada secció transversal, per definició." (De fet l'ordre de connexió ha d'ésser $n - m + 2$, si no l'esfera no seria pas simplement connexa!). Posteriorment, Riemann estudia les relacions entre l'ordre de connexió i el nombre de línies que formen la vora de la superfície. Demostra que "el nombre de línies tancades que formen la vora d'un tros de superfície n-plement connexa és n o bé n menys un nombre parell". Aquest teorema és fals per a la banda de Möbius, que és doblement connexa i només té una vora.

La segona gran idea de Riemann a la seva tesi és la d'associar una superfície (la superfície de Riemann) a cada funció multiforme (això és el germen del concepte d'espai recobridor!), idea que agafa tota la seva brillantor en la teoria de funcions abelianes.

En la segona memòria del 1857 Riemann torna a definir l'ordre de connexió: "Quan sobre una superfície F hom pot traçar n corbes tancades... que no formin una vora completa d'una part d'aquesta superfície però que, junt amb una altra corba tancada, formin la vora completa d'una part de la superfície, llavors hom diu que la superfície és $(n + 1)$ vegades connexa". I tot seguit demostra que "aquest caràcter de la superfície és independent del sistema de corbes".

Fem unes quantes consideracions sobre aquesta definició d'ordre de connexió: a) Aquesta definició (que més tard estendrà a varietats de dimensió arbitrària) conté en germen el concepte d'homologia, que, d'altra banda, no adquirirà tot el valor fins a Poincaré. b) Aquesta definició s'aplica tal qual a les superfícies tancades. c) La definició no és satisfactòria per a classificar les superfícies no tancades en tipus topològics; així, un tor amb dos forats i una superfície plana amb tres forats són, tots dos, d'ordre de connexió 4, i no són pas homeomorfs.

La memòria de Riemann prossegueix amb l'estudi de les funcions abelianes, on considera equivalents dues corbes que puguin ésser transformades l'una en l'altra mitjançant una transformació biracional. Això li permet, tot conservant-ne la natura analítica, de simplificar la geomètrica. Així, associant a cada corba la seva superfície de Riemann, converteix la classificació de corbes algèbriques en la classificació de superfícies a partir de transformacions bijectives i bicontínues. La importància per a la topologia n'és evident: estudi de les transformacions topològiques, recerca d'invariants topològics, classificació de les superfícies segons els principis de l'*analysis situs.*

La contribució de Riemann a la topologia fou enorme, i no solament per les coses que féu, sinó per la influència que tingueren els seus escrits "acollits com l'esdeveniment més considerable de l'anàlisi en la nostra època", digué Ch. Hermite.

Els matemàtics de la fi del segle XIX es familiaritzen amb la teoria de Riemann després de les dues edicions d'un curs donat per Carl Neumann

(1832-1925) el 1863. La primera edició ("Vorlesung über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale", Teubner, 1865) desplega la idea essencial de transformació contínua. Neumann diu: "Per tal de transformar una superfície qualsevol en una altra només cal trobar una llei que faci correspondre a cada punt de la primera un punt ben determinat de la segona, fent per manera que a dos punts pròxims d'una corresponguin dos punts pròxims de l'altra".

Més endavant observa que la idea de transformació contínua porta a una classificació de les superfícies, i dóna uns quants resultats i definicions que s'hi refereixen.

La segona edició, de 1884, imposa condicions molt raonables a les seves superfícies: a) "La superfície ha d'ésser tal que l'entorn de cada un dels punts sigui un domini simplement connex", b) "La superfície ha d'ésser tal que hom sempre pugui trobar un sistema de seccions transversals que la faci simplement connexa". Així hom exclou certes superfícies patològiques.

Malgrat tot, Neumann ja veu que els seus teoremes no són vàlids per a la banda de Möbius, en la qual una secció transversal no fa canviar el nombre de corbes de frontera.

Enrico Betti (1823-1892) conegué Riemann el 1858 però fou sobretot de 1863 a 1865, quan Riemann s'instal·là a Pisa per raons de salut, que tingueren l'ocasió d'intercanviar llurs idees. La memòria que Betti publica el 1871 ("Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni", *Ann. di Mat. pura ed appl.*, 4, 1871) és un fruit immediat del contacte amb Riemann; així ho demostren unes cartes de Betti a Tardi el 1863 que contenen l'esquelet de la memòria i en les quals hom pot veure clarament que les idees de Betti sobre la topologia no canviaren en aquests vuit anys.

En aquesta famosa memòria, apareguda als *Annali,* Betti defineix i estudia els espais n-dimensionals, interpretant analíticament els conceptes d'espai, frontera i connex. Després tracta l'ordre de connexió d'espais n-dimensionals, introdueix els que més tard foren anomenats nombres de Betti i, de manera anàloga a la de Riemann per a les superfícies, demostra el teorema fonamental: "Si t espais tancats n-dimensionals $A_1, \dots, A_t$ no formen tots sols, però sí amb qualsevol altre espai tancat n-dimensional, la vora d'un espai connex $(n + 1)$-dimensional enterament contingut a R (R és un espai ambient), i si un altre sistema de t' espais tancats n-dimensionals frueix de la mateixa propietat, llavors $t \gtrless t'$".

Aquest teorema, que permet la definició dels diversos ordres de connexió, és fonamental; ara bé, tant la demostració de Riemann per a superfícies com la de Betti recolzen en un lema que tots dos cregueren evident però que és fals. Aquest lema podríem dir que diu que la unió de dos sistemes com els que apareixen a l'enunciat del teorema és un altre sistema d'aquests. En fou donat un contraexemple per A. Tonelli el 1873. D'altra banda, aquest lema inicia una algebrització que fou aprofitada per Poincaré amb un formalisme adequat. Aquest procés, característic de l'època, també pot ésser observat a l'obra de Klein.

El treball que Felix Klein (1849-1925) publica el 1872, i que hom coneix com "el programa d'Erlangen" ("Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen", Erlangen, Deichert, 1872), és decisiu per a l'evolució de la topologia. Tres deus alimenten aquest treball: a) El concepte d'aplicació d'una superfície en una altra; b) la teoria d'invariants de Cauchy; c) el concepte de grup. Amb aquestes idees el "programa" desenvolupa la idea de l'estudi dels invariants d'un cert grup de transformacions; així, la topologia esdevé l'estudi dels invariants del grup de transformacions bijectives i bicontínues. Representa, en aquell moment, una concepció molt moderna de la topologia.

Els progressos principals de la topologia de 1875 a 1890 provenen tots dels treballs de Klein i els seus deixebles, sobretot Weichold i von Dyck.

Entre els treballs que Klein dedica a la teoria de funcions cal citar un curs donat a Leipzig el 1880-81 ("Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale", Teubner, 1882). Hi tracta la classificació de superfícies segons el "nombre p de Riemann", havent pres la definició de superfície donada per Neumann. Després estudia les aplicacions conformes d'una superfície tancada en ella mateixa segons que conservin el sentit dels angles o no ho facin; així defineix les superfícies simètriques i pot tractar les superfícies amb vora o sense, orientables o no, de la mateixa manera.

Figura 2

Podríem dir que el mèrit dels treballs de Klein és haver introduït les superfícies no orientables en el camp de la recerca topològica considerant-les superfícies i no curiositats matemàtiques. Aquests resultats obren el camí a Walter von Dyck (1856-1934), que deixarà la topologia algèbrica en la situació en què havia de trobar-la Poincaré.

Entre el 1885 i el 1887 von Dyck publica tres memòries curtes ("Beiträge zur Analysis situs", *Ber. Verh. Sächs.*, 37 (1885), 38 (1886), 39 (1887), *Math. Ann.*, 32 (1888), 37 (1890)) que ja contenen les idees principals dels seus grans articles. Analitzem-les: von Dyck considera que les varietats són engendrades per unes varietats elementals definides amb precisió: porcions d'espai aplicables a l'espai euclidià, la vora de les quals és una varietat d'una dimensió de menys i que no es talla ella mateixa. Assigna un nombre característic igual a 1 a cada varietat elemental; així assigna a cada varietat una característica (que la introducció, o supressió, d'una varietat elemental fa augmentar, o disminuir, en 1). Estudia les varietats esfèriques ("la característica de S_n val 2 o 0 segons que n sigui parell o senar"), i les projectives ("la característica de P_n és 1 o 0 segons que n sigui parell o senar"). Finalment, demostra la invariància de la característica per a dimensions 1 i 2 i inicia l'estudi de formes normals per a $n \geqslant 3$, problema que no arribarà a resoldre.

La topologia pròpiament dita comença cap a la fi del segle XIX amb la "teoria de conjunts" de Cantor i les memòries sobre l'*Analysis situs* de Poincaré.

Cantor, considerant conjunts qualssevol de punts en els espais euclidians, creà els conceptes bàsics de la topologia conjuntista: punt d'acumulació, frontera, interior, connexió, etc. Mitjançant aquests hom pogué establir els fonaments de la teoria de funcions de variable real, obrint el camí de l'estudi sistemàtic de la topologia del pla, de la teoria de corbes i de la teoria de la dimensió.

L'objectiu de Poincaré era la caracterització topològica, mitjançant invariants oportuns, de les varietats (triangulables) desenvolupant l'esquema combinatori, bàsic de la topologia algèbrica. D'aquesta manera és establerta, de bon començament, una divisió forta de la topologia: la conjuntista (o general) i l'algèbrica. Els primers intents d'atenuar aquesta divisió de mètodes foren duts a terme per Alexandroff amb la definició del concepte de nervi, que permet d'associar a cada recobriment d'un espai topològic un complex simplicial. Però aquesta divisió, encara que atenuada, persisteix fins als nostres dies.

L'obra d'Henri Poincaré

L'aportació transcendental d'Henri Poincaré (1854-1912) a la topologia algèbrica fou iniciada amb el seu "Analysis situs" (*J. Ecole Polytech.*, 1, 1895) i continuà fins al 1904 en els "Compléments", especialment en el primer ("Complément à l'Analysis situs", *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 13, 1899), en el segon ("Second complément à l'Analysis situs", *Proc. London Math. Soc.*, 32, 1900) i en el cinquè ("Cinquième complément à l'Analysis situs", *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 18, 1904). Dividiré l'estudi dels seus treballs en sis apartats en els quals analitzaré, a més, l'aportació de Heegaard, íntimament lligada a l'obra de Poincaré.

El concepte d'homologia i els nombres de Betti

En l'"Analysis situs" Poincaré fa dues definicions analítiques de varietat: la primera per mitjà d'un sistema d'equacions contínues implícites $F_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$, $i = 1, \ldots, p$, $f_j(x_1, \ldots, x_n) > 0$, $j = 1, \ldots, q$, amb les condicions de no anul·lació simultània dels determinants d'ordre p formats amb dF_i/dx_k, $i = 1, \ldots, p$, $k = 1, \ldots, n$; el conjunt de punts que satisfan les equacions anteriors són anomenats per ell una varietat de dimensió n-p. Els conceptes de varietat afitada, connexa, vora i varietat tancada se'n dedueixen de manera natural.

En la segona definició expressa les coordenades d'un punt com a funcions contínues de m variables independents $x_k = G_k(y_1, \ldots, y_m)$, $k = 1, \ldots, n$, amb certes restriccions: $g_h(y_1, \ldots, y_m) > 0$, $h = 1, \ldots, r$. Després demostra que cada punt d'una varietat (segons la primera definició) posseeix un entorn en el qual pot ésser descrita segons el segon mètode. Per tant les varietats de Poincaré sempre són homogènies.

Després estudia les transformacions, cosa que el porta als conceptes d'homeomorfisme local i d'homeomorfisme, i considera el concepte d'orientabilitat en termes de determinants adequats.

Diu Poincaré en l'"Analysis situs": "Considerem una varietat V de dimensió p, i sigui W una varietat de dimensió q ($q < p$) continguda a V. Suposem que la vora ("frontière complète") de W es descompon en r varietats $(q-1)$-dimensionals $V_1, \ldots, V_r$. Llavors posarem $V_1 + \ldots + V_r \sim 0$. Més generalment, la notació $k_1 V_1 + k_2 V_2 \sim k_3 V_3 + k_4 V_4$, on les k_i són enters i les V varietats $(q-1)$-dimensionals, significarà que existeix una varietat W de dimensió q, continguda a V, la vora de la qual és composta de k_1 varietats poc diferents de $V_1, \ldots$ Les relacions d'aquesta forma podrien ésser anomenades homologies" (traducció lliure). Observeu la necessitat de fer que tot passi dins de la varietat V!

En el primer complement ja desapareix l'expressió "poc diferents" i hi precisa que "les homologies es poden sumar, restar, multiplicar per un nombre enter i alguns cops dividir per enters".

Després defineix els "nombres de Betti" P_j, $j = 1, \ldots, m-1$, d'una varietat m-dimensional com el nombre de varietats j-dimensionals tancades contingudes a V que no estan lligades per cap relació d'homologia augmentat en 1 (els nombres de Betti actuals són els de Poincaré disminuïts en 1). Observeu que la relació entre els nombres de Betti P_j i els nombres de connexió P_j definits per Riemann i Betti és donada per $p_j = P_i + t_{j-1} + t_j$, on t_j és el nombre de coeficients de torsió parells en dimensió j.

És P. Heegaard qui assenyalà la manca de precisió de la definició (per exemple, les subvarietats considerades han d'ésser orientables). Les crítiques de Heegaard sobre els nombres de Betti i el teorema de dualitat induïren, en part, Poincaré a escriure els complements.

Els políedres

La introducció dels políedres en el primer complement és un pas decisiu per a l'algebrització de la topologia.

Sigui V una varietat tancada de dimensió n subdividida en s_n varietats $a_1^1, \ldots, a_{s_n}^n$ de dimensió n, les fronteres $a_1^{n-1}, \ldots, a_{s_n}^{n-1}$ de les quals siguin varietats de dimensió n − 1, etc. Poincaré defineix els nombres d'incidència $e_{i,j}^p$ així: 0 (zero) si a_j^{p-1} no és vora de a_i^p, + 1 si n'és vora en relació directa (és a dir, si a_j^{p-1} és definit per $F_1 = \ldots = F_{n-p} = F_{n-p+1} = 0$ i la varietat a_i^{pj} per $F_1 = \ldots = F_{n-p} = 0, F_{n-p+1} > 0$) i − 1 si n'és vora en relació indirecta. Llavors defineix l'esquema d'un políedre com el conjunt de congruències $a_i^p \equiv \sum_j e_{i,j}^p a_j^{p-1}$; els coeficients compleixen $\sum_j e_{i,j}^p e_{j,k}^{p-1} = 0$ i $\sum_i e_{i,k}^p = 0$ (aquesta darrera condició implica que Poincaré solament considera varietats orientables).

Les combinacions lineals de cel·les $\sum_i k_i a_i^p$ continuen essent anomenades per ell varietats, i defineix com a tancades aquelles que compleixen

$$\sum_i k_i a_i^p \equiv 0.$$

Les congruències indueixen llavors les homologies; així, $a_k^{p+1} \equiv \sum_i e_{k,i}^{p+1} a_i^p$ implica $\sum_i e_{k,i}^{p+1} a_i^p \sim 0$, que al seu torn implica $\sum_i e_{k,i}^{p+1} a_i^p \equiv 0$; és a dir, en llenguatge actual, que tota vora és cicle.

Poincaré també introdueix el concepte de políedre dual (de fet ho fa per a dimensió 3, però el mètode és general): a cada cel·la a_i^p de dimensió p del políedre P correspon una cel·la b_i^{n-p} del políedre dual P′, i els nombres d'incidència són donats per $e'^q_{i,j} = e^{n-q+1}_{j,i}$.

Considera llavors les matrius d'incidència (primer d'una manera un xic complicada i, en el segon complement, en la forma actual) analitzant les operacions admissibles per a reduir-les a una forma diagonal. Observeu que, com que permet de dividir en les homologies, no li apareixen els coeficients de torsió; els introdueix, això no obstant, en el complement segon. La matriu d'incidència del políedre dual és la transposada.

L'inici d'una topologia purament combinatòria és degut, emperò, a M. Dehn i P. Heegaard ("Analysis situs", Enzyklopädien der math. Wissenschaften, 3, Teubner, 1907), que són els primers que consideren, el 1907, un complex simplicial abstracte. Defineixen els símplexs, la incidència, i també l'orientabilitat, començant per la dimensió 0 i pujant, i consideren el concepte d'homeomorfisme per mitjà d'un procés de subdivisió.

El teorema de dualitat

"Per a una varietat tancada, els nombres de Betti equidistants dels extrems són iguals" ("Analysis situs"). Per a Poincaré aquesta frase s'aplicava a les varietats orientables i als nombres de Betti tal com ell els havia definit (vegeu H. Poincaré, "Sur les nombres de Betti", *C. R. Acad. Sci. Paris,* 128, 1899, sobre la discrepància de Heegaard sobre aquesta qüestió). La demostració que en dóna a l'"Analysis situs" és molt incompleta: sigui V una varietat tancada i orientable (això Poincaré no ho diu pas) de dimensió n. Si V_1 i V_2 són dues varietats de dimensió complementària, associa a cada punt de $V_1 \cap V_2$ un nombre, + 1 o bé − 1, amb l'ajut d'un determinant funcional, i anomena N (V_1, V_2) el nombre de (+ 1)'s menys el nombre de (−1)'s. Per tal de demostrar que $P_i = P_{n-i}$ per a tot i, considera $P_i - 1$ seccions linealment independents $C_i, \ldots, C_{P_i-1}$ de dimensió i, i t varietats tancades $V_1, \ldots, V_t$ de dimensió n − i. Llavors demostra: "La condició necessària i suficient perquè hi hagi una homologia $\sum_j k_j V_j \sim 0$ és que

$$\Sigma\, k_j\, N(C_1, V_j) = \Sigma\, k_j\, N(C_2, V_j) = \ldots = \Sigma\, k_j\, N(C_{P_i-1}, V_j) = 0.$$

Ara bé, si $t > P_i - 1$, hom podrà trobar sempre enters k_j que compleixin aquestes condicions, car tindrem t k_j arbitràries i $P_i - 1$ condicions. Si les V_i són independents hom tindrà, doncs, $t < P_i - 1$. Per tant, $P_{n-i} \leqslant P_i$; però, canviant i per n − i hom obté $P_i \leqslant P_{n-i}$".

En el primer complement, ja amb el concepte de matriu d'incidència i de políedre dual, Poincaré torna sobre el tema, demostrant el teorema de dualitat per a n = 3. "La demostració podria, sense cap dubte, ésser estesa a un políedre qualsevol". Si P_j són els nombres de Betti del políedre i P_j' els del seu dual, Poincaré demostra que $P_i' = P_i$. (En el segon complement du a terme una demostració en dimensió n).

Observeu que Poincaré no considera mai els nombres de Betti P_0 i P_n; de fet aquests no seran considerats fins a 1908 per Tietze.

Els coeficients de torsió

En el segon complement Poincaré comença estudiant la diagonalització de les matrius d'incidència; en la forma diagonal que obté cada terme w_i^p divideix el següent w_{i+1}^p. Després considera la qüestió de la divisibilitat de les homologies per un enter; la congruència $a_i^p \equiv w_i^p\, a_i^{p-1}$ indueix l'homologia $w_i^p\, a_i^{p-1} \sim 0$ i, si és permès de dividir, $a_i^{p-1} \sim 0$. Així, doncs, tota homologia té la forma $\Sigma k_i a_i^{p-1} \sim 0$ si hom pot dividir, o bé $\Sigma k_i w_i^p a_i^{p-1} \sim 0$ si no és permès de dividir. Les dues condicions coincideixen quan tots els w_i no nuls són iguals a 1.

Llavors Poincaré distingeix les varietats sense torsió (per a les quals $w_i^p = 0$ o bé $w_i^p = 1$, per a tot i, p) de les varietats amb torsió. Els invariants que no són ni 0 ni 1 són anomenats per ell coeficients de torsió. Demostra que tot coeficient de torsió d'un políedre també ho és del dual d'aquest, cosa que el condueix a afirmar que $w_i^p = w_i^{n-p+1}$ (observeu que w_i^p indica un coeficient de torsió en dimensió p – 1!). Amb la notació actual: $t_i^p = w_i^{p+1}$, i la relació anterior és escrita $t_i^p = t_i^{n-p-1}$

El grup fonamental

Amb l'afany de caracteritzar les varietats amb invariants numèrics, Poincaré observa la conveniència d'aplicar a cada punt de la varietat un grup que ell anomena grup fonamental. Aquest és, potser, el primer pas de la teoria de l'homotopia, que serà desenvolupada per Hurewicz el 1935.

En una varietat definida per funcions F_i pot ocórrer que en recórrer una corba tancada els valors finals de les funcions F_i no coincideixin amb els inicials. Anomena llaç allò que avui anomenem llaç nulhomòtop, i defineix una equivalència en el conjunt de camins tancats que parteixen d'un punt: $w \cong w'$ si $w' w^{-1} \cong 0$, observant que la relació $2w \cong 0$ no implica pas sempre $w \cong 0$. Llavors introdueix el grup fonamental: "A cada camí tancat w correspon una substitució s del grup; s és la identitat si i solament si $w \cong 0$; si s i s' corresponen a w i w' i si $w'' \cong w + w$, llavors ss' correspon a w''". Finalment estableix la relació existent entre el grup fonamental i el primer nombre de Betti.

El teorema d'Euler

La fórmula d'Euler torna a ésser tema d'estudi tant en la seva primera obra com en el primer complement. A l'"Analysis situs" demostra que el nombre $N = a_n - a_{n-1} + \ldots \mp a_1 \pm a_0$ no és alterat sota el procés de "derivació" del políedre; emprant el fet que, si P_1 i P_2 són dos políedres d'una varietat, sempre hi ha un políedre derivat d'ambdós, pretén demostrar que N és un invariant topològic (la primera demostració rigorosa en serà feta per J.W. Alexander el 1915). Finalment, després de considerar un "tetràedre generalitzat de dimensió n" (per al qual N = 2 si n és parell i N = 0 si és senar), obté la llei següent: $N = P_{n-1} - P_{n-2} + \ldots + P_2 - P_1$ si n és senar (d'on N = 0 per la llei de dualitat!) i $N = 3 - P_1 + P_2 \ldots + P_{n-1}$ si n és parell.

En el primer complement, ja amb elements més precisos, introdueix els nombres de Betti reduïts P_j' (P_{j-1}' és el nombre de varietats de dimensió j. tancades i linealment independents, que són combinació lineal de $a_1^j, \ldots, a_{s_j}^j$). Si, en llenguatge actual, hi ha $a_j - a_j'$ cicles i $a_j - a_j''$ vores en dimensió j, resulta que $P_j' - 1 = a_j' - a_j''$, d'on $N = a_n - a_{n-1} + \ldots \pm a_1 \mp a_0 = 1 - (P_{n-1}' - 1) + \ldots \mp (P_2' - 1) \pm (P_1' - 1) \mp 1$. Amb la notació actual $p_k = P_k - 1$, $p_0 = 1$ i $p_n = 1$ si la varietat és orientable o $p_n = 0$ en el cas contrari i, suposat que $P_j' = P_j$, en resulta la fórmula d'Euler-Poincaré, és a dir,

$$\sum_k (-1)^k a_k = \sum_k (-1)^k p_k .$$

No obstant això, la demostració del fet que $P_j' = P_j$ tornarà a quedar per a Alexander.

L'obra d'Henri Poincaré és tan important en el camp de la topologia (com en tants d'altres) que marca fortament el desenvolupament de la topologia algèbrica durant una bona part del segle XX, des dels treballs de M. Dehn i P. Heegaard, passant pels de H. Tietze, L.E.J. Brouwer, J.W. Alexander, fins a la revolució iniciada en els congressos de Zuric i de Moscou de 1935.